

Procjena usvojenosti temeljnih znanja i pristupa rješavanju zadataka u elementarnoj matematici

prije i poslije uvođenja državne mature
- projekcija na obrazovanje

BRANKA GOTOVAC¹

U to je doba moj tri godine stariji rođak bio u srednjoj školi. Imao je velikih problema s algebrom pa je uzimao instrukcije. Ja sam smio sjediti u kutu dok je instruktor pokušavao poučiti mog rođaka algebri. Čuo sam ga kako spominje x.

Upitao sam rođaka: „Što pokušavaš učiniti?”

„Pokušavam odgonetnuti x, kao u $2x + 7 = 15$.”

Rekao sam mu: „To je 4.”

„Da, ali ti si ga odgonetnuo pomoću aritmetike. Trebaš to učiniti pomoću algebre.”

Srećom, algebru nisam naučio u školi, nego uz pomoć starog udžbenika moje tete, koji sam našao na tavanu. Tako sam shvatio da je osnovna ideja pronaći vrijednost x - svejedno je kako se dođe do rješenja. Za mene nema „aritmetičkog” ili „algebarskog” rješavanja. „Algebarsko” rješavanje skup je pravila koja mogu dovesti do rješenja ako ih se slijepo slijedi: „Oduzmi 7 s obje strane; ako imaš množitelja, podijeli obje strane množiteljem...” - radi se o nizu koraka kojima se može doći do rješenja ako ti nije jasno što pokušavaš učiniti. Pravila su izmišljena zato da bi djeca koja uče algebru mogla proći na ispitu. Zato je moj rođak nikada nije uspio svladati.

R. P. Feynman²

¹Branka Gotovac, Kemijsko-tehnološki fakultet u Splitu

²Richard Phillips Feynman (1918.-1988.), američki fizičar, dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1965. godine.

Uvod

Rezultati istraživanja usvojenosti temeljnih znanja i pristupa rješavanju zadataka u elementarnoj matematici, provedenog na početku akademske godine 2009./2010. na osnovi testiranja 154 „novopečena” studenta³ Kemijsko-tehnološkog fakulteta iz Splita⁴, ukazali su na slabu usvojenost temeljnih matematičkih znanja i nekritički pristup rješavanju zadataka, na nezadovoljavajuću razinu matematičke pismenosti, i indikativni su za potrebu preusmjerenja pristupa učenju i poučavanju [1].

Ove akademske godine imamo prvu generaciju studenata s položenom državnom maturom. Je li uvođenje državne mature donijelo promjene i, ako jest, kakve su po ovom pitanju?

Testirano je 125 studenata preddiplomskih studija i stručnog studija KTF-a. 21% je završilo gimnaziju, a 79% strukovne škole. 7% ispitanih studenata srednju je školu završilo u Bosni i Hercegovini. 90% ispitanika polagalo je državnu maturu (10% je „starih” studenata). Državnu maturu iz matematike (i to osnovnu razinu) polagalo je (i položilo) 43% ispitanika, više razinu 14%, a za 33% nema podataka.

Niže je dan provedeni test sa zadacima uglavnom iz područja aritmetike, algebre i analitičke geometrije u ravnini-pravac, koje su studenti mogli lako riješiti koristeći samo osnovna znanja. Logičkim razmišljanjem mogli su doći do zaključaka postavljanjem pitanja.

Kao ni protekle godine, test nije najavljen, niti su sadržaji sa studentima pretходно ponavljani⁵.

Test

završena srednja škola: _____ **maturirao/la godine:** _____

1. Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Treba odrediti:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$

U zadacima od 2. do 6. za dane tvrdnje treba zaokružiti ispravan odgovor (T = točno, N = netočno).

2. Za svaki realan broj x može se odrediti vrijednost izraza $\frac{3}{x-2}$. T N

3. $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$. T N

³ 37% testiranih su bivši gimnazijalci, a 15% ukupnog broja ispitanika srednju je školu završilo u Bosni i Hercegovini.

⁴ kraće KTF-a

⁵ Važno je napomenuti da već dulji niz godina nema prijamnog ispita na Fakultetu.

$$4. \quad 0,3\% = \frac{3}{1000}. \quad \text{T} \quad \text{N}$$

5. $\frac{1}{a} - \frac{2-a}{a^2b} = \frac{ab-2-a}{a^2b}$. T N

6. $\ln 2 - \ln 7 = \frac{\ln 2}{\ln 7}$. T N

7. Je li $x = \frac{1}{2}$ korijen jednadžbe $3^{-x+\frac{1}{2}} = 1$? Obrazložiti.

8. Treba riješiti nejednadžbe: a) $x^2 - 9 > 0$, b) $\frac{3}{2-x} > 0$, c) $x^2 + 1 < 0$.

U zadacima 9. i 10. za dane tvrdnje treba zaokružiti ispravan odgovor (T = točno, N = netočno).

9. Vrijedi da je $(x-2)(x+1) > 0$ za $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. T N

10. Izraz za površinu jednakostraničnog trokuta je $p = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. T N

11. Odrediti udaljenost točaka $A(0, -3)$ i $B(4, 0)$.

12. Ispitati ispravnost tvrdnje: sjecište pravaca $x + y - 7 = 0$ i $x - y - 9 = 0$ je točka $S(2, 5)$.

13. Ispitati pripadaju li točke $A(3, 3)$, $B(4, 4)$ i $C(4, 3)$ jednome pravcu.

14. U istom koordinatnom sustavu nacrtati pravce:

a) $4x + 3y - 12 = 0$, b) $y = 3$

15. Zadan je pravac jednađžbom $y = \frac{3}{5}x + \frac{5}{3}$.

Je li kut što ga dani pravac zatvara s pozitivnim dijelom x osi tupi kut? Obrazložiti.

Rezultati

U tablici dan je postotak studenata generacije 2010./2011. i generacije 2009./2010. s obzirom na to kako su odgovorili na pojedine zadatke u testu.

U tablici se vidi da je za 2., 4. i 6. zadatak nešto veća razlika u postotku ispravnih odgovora studenata dviju generacija⁶. Također, 4. 13. i 14.b) zadatak idu u korist studenata generacije 2009./2010.

⁶ Navedeni zadaci su zatvorenog tipa; bira se opcija Točno ili Netočno.

| Zadatak | Postotak studenata generacija 2010./2011. (generacija 2009./2010.) | | | | | |
|---------|---|------|---------------------|------|-----------------|------|
| | ispravno odgovorili | | pogrešno odgovorili | | nisu odgovorili | |
| 1.a) | 17% | 8 % | 9% | 14 % | 50% | 53 % |
| 1.b) | 13% | 9 % | 13% | 13 % | 50% | 53 % |
| 1.c) | 2% | 3 % | 17% | 16 % | 58% | 57 % |
| 2. | 34% | 19 % | 64% | 79 % | 2% | 3 % |
| 3. | 50% | 60 % | 50% | 39 % | 0% | 1 % |
| 4. | 30% | 48 % | 69% | 51 % | 1% | 1 % |
| 5. | 48% | 51 % | 52% | 46 % | 0% | 3 % |
| 6. | 57% | 40 % | 42% | 51 % | 1% | 9 % |
| 7. | 23% | 28 % | 23% | 19 % | 54% | 53 % |
| 8.a) | 3% | 6 % | 79% | 73 % | 18% | 21 % |
| 8.b) | 8% | 14 % | 55% | 47 % | 37% | 38 % |
| 8.c) | 5% | 7 % | 61% | 58 % | 34% | 35 % |
| 9. | 42% | 47 % | 54% | 46 % | 4% | 6 % |
| 10. | 43% | 44 % | 56% | 56 % | 1% | 0 % |
| 11. | 20% | 18 % | 18% | 16 % | 62% | 66 % |
| 12. | 38% | 42 % | 11% | 18 % | 51% | 40 % |
| 13. | 51% | 69 % | 12% | 12 % | 37% | 19 % |
| 14.a) | 14% | 18 % | 40% | 35 % | 46% | 47 % |
| 14.b) | 20% | 41 % | 15% | 12 % | 65% | 47 % |
| 15. | 6% | 5 % | 11% | 20 % | 83% | 75 % |

Tablica 1. Postotak studenata dviju generacija s obzirom na to kako su odgovorili na pojedine zadatke u testu

Analiza rezultata

• Testovi ispitanika generacije 2009./2010. pomno su analizirani, a za svaki su zadatak izdvojene i grupirane najčešće pogreške. Analizirala su se, osim „krivih”, i prava rješenja. Isto se zamjećuje analizom testova ispitanika generacije 2010./2011. Jedino što se može izdvojiti su neka malo drugačija „rješenja” (interpretacije) koja su niže navedena. Komentar je zapravo suvišan.

Zadatak 1.c) (razlika skupova poistovjećuje se s Kartezijevim produktom skupova)

$$„A \setminus B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}”$$

Zadatak 12. („rješavanje” sustava jednačbi)

$$\begin{array}{ll}
 x + y - 7 = 0 : y & x - y - 9 = 0 : x \\
 x - 7 = 0 & -y - 9 = 0 \\
 x = 7 & -y = 9 : (-1) \\
 & y = 9
 \end{array}$$

Zadatak 15.

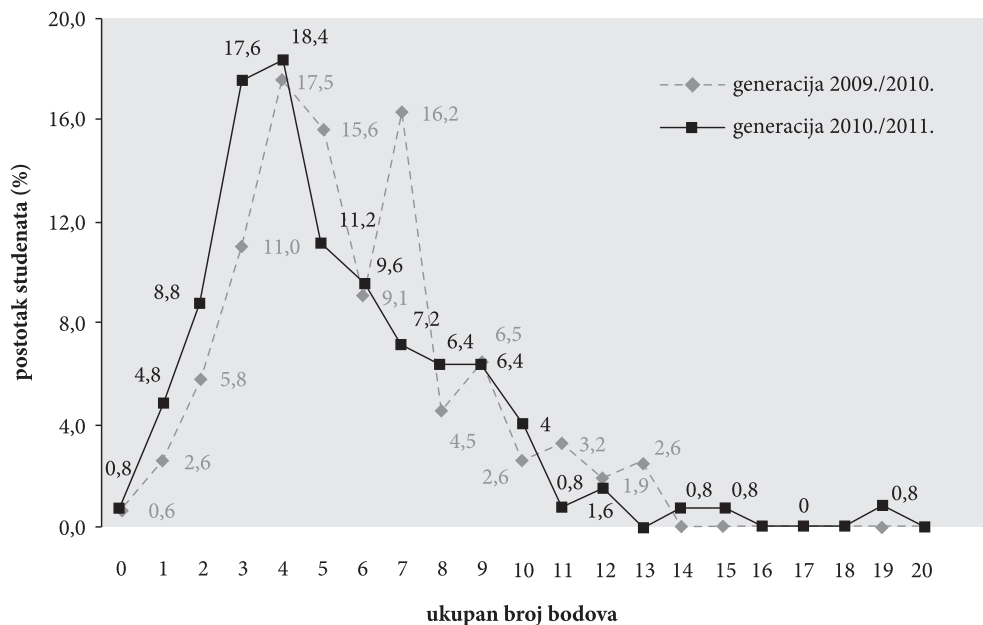
- „Kut je dijelom tupi, a dijelom šiljasti. (Komentar ispitanika uz pogrešno nacrtan pravac - s pozitivnim odsječcima na koordinatnim osima.)

- „Nema kuta.” (Komentar ispitanika uz dobro nacrtan pravac.)

Interesantno je da 24% studenata ove generacije **zadatke 1.a), 1.b) i 1.c)** shvaćaju kao ponuđene opcije rješenja i zaokružuju jednu od njih, baš kao i 25% prošlogodišnjih studenata.

Registrirani problemi očito su zajednički za studente objiju generacija.

• Na slici 1. grafički je prikazan postotak studenata objiju generacija u odnosu na ukupan broj bodova osvojenih na testu. Maksimalan broj bodova je 20; za svaki (pod)zadatak po 1 bod. (Tako je, na primjer, 1. zadatak nosio 3 boda.)



Slika 1. Grafički prikaz postotka studenata dviju generacija u odnosu na ukupan broj osvojenih bodova na testu

Kod ispitanika prošlogodišnje generacije izdvojile su se tri (zapravo četiri) skupine u odnosu na ukupan broj bodova osvojenih na testu. 9% studenata imalo je od 0 do 2 boda, 70% od 3 do 7 bodova, 21% studenata od 8 do 13 i, dakle, nitko više od 13 bodova.

Među ispitanicima druge generacije 14% ih ima od 0 do 2 boda, 64% od 3 do 7 bodova, 19% od 8 do 13 i 3 su studenta s više od 13 bodova.

• Postoji li statistički značajna razlika u uspjehu na testu procjene usvojenosti temeljnih znanja iz elementarne matematike između studenata dviju generacija?

Ispitano je sveukupno 279 studenata, od čega je 154 studenta prve generacije.

27 studenata osvojilo je 50% i više od ukupnog broja bodova, a među njima je 16 studenata prve generacije, 2009./2010.

| OPAŽENE FREKVENCije | | | | |
|---------------------|-------------|---------------------------------------|-----------|-----------------|
| | | USPJEH NA TESTU* (osvojeni bodovi) | | |
| | | od 10 do 20 | od 0 do 9 | N_r |
| GENERACIJA | 2009./2010. | 16 | 138 | 154 |
| | 2010./2011. | 11 | 114 | 125 |
| N_s | | 27 | 252 | $N_{TOT} = 279$ |

Tablica 2. Tablica kontingencije

Frekvencije studenata KTF-a raspoređene prema generaciji i uspjehu na testu

| TEORETSKE FREKVENCije | | | | |
|-----------------------|-------------|--------------------------------------|-----------|-----------------|
| | | USPJEH NA TESTU (osvojeni bodovi) | | |
| | | od 10 do 20 | od 0 do 9 | N_r |
| GENERACIJA | 2009./2010. | 14,90 | 139,10 | 154 |
| | 2010./2011. | 12,10 | 112,90 | 125 |
| N_s | | 27 | 252 | $N_{TOT} = 279$ |

Tablica 3. Tablica s teoretskim frekvencijama

*Studenti su, s obzirom na osvojene bodove, podijeljeni u dvije grupe; do 9 osvojenih bodova i od 10 i više osvojenih bodova. Pogrešno bi bilo navedenu podjelu shvatiti kao kriterij po kojemu studenti jedne grupe nisu zadovoljili, a druge jesu. Valja imati na umu da je testirana usvojenost osnovnih znanja i posve je jasno da temeljna znanja moraju usvojiti svi.

Teoretske frekvencije izračunate su za svako polje u tablici kontingencije prema formuli $f_t = \frac{N_s x N_r}{N_{TOT}}$. (N_s je zbroj frekvencija u odgovarajućem stupcu, N_r je zbroj frekvencija u odgovarajućem retku, a N_{TOT} je ukupan broj podataka.)

Prema χ^2 - testu za nezavisne uzorke podijeljene prema dva kriterija (tablica kontingencije 2×2), dobivena p-vrijednost (u programu MS Excel) iznosi 0,655158, što znači da ne postoji statistički značajna razlika u uspjehu na testu procjene usvojenosti temeljnih znanja iz elementarne matematike između studenata dviju generacija.

Razmišljanje

Studenti generacije 2010./2011. prva su generacija studenata s položenom državnom maturom. Polagali su test iz matematike na državnoj maturi, pisali probne testove, organizirane su dodatne pripreme, uzimanje privatnih instrukcija zbog državne mature također valja uzeti u obzir, pa ipak, po ovom pitanju, promjene nema! Zašto? Kako su iskorišteni prethodno provedeni probni ispiti? Da bi se obrazovni ishodi jasno definirali? Jesu li i u kojoj mjeri utjecali na mijenjanje programskih sadržaja? Na preusmjeravanje pristupa učenju i poučavanju? Na koji način?

Jasno određen cilj usmjerit će razvojnu strategiju obrazovanja sadržajno i metodološki (što upotrijebiti, čime ostvariti cilj, kojim sadržajima, kako).

Koja je osnovna obrazovna zadaća, opći cilj? Uvijek je isti: osobno i društveno ostvarenje pojedinca. Međutim, i društvo i pojedinac stalno evoluiraju, „žive” razvojni proces i od toga je obrazovanje nedjeljivo. Sustav obrazovanja treba omogućiti pojedincu da se prepozna u društvu; da pronade svoje mjesto na kojemu bi se najbolje mogao ostvariti i da mu pruži takva znanja, ona najtrajnija, koja će ga osposobiti za daljnja, za cjeloživotno učenje u „društvu znanja”.

Odatle nužno proizlazi i stav prema znanju: znanje ima vrijednost. Zašto, dakle, učimo? Odgovor je neupitan i jasan: učimo za život (smislenost, puninu života, za ostvarenje). Ne učimo za test.

To je odgovorno obrazovanje, učenje i poučavanje, usmjereno na usvajanje važnih životnih kompetencija.

Koliko se pažnje npr. posvećuje umijeću razmišljanja?

Prema podacima dobivenim istraživanjem mišljenja učitelja i nastavnika o nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama, uočava se *„da se u nastavi matematike nedovoljno razvija kritičko mišljenje, tj. samostalno promišljanje i zaključivanje o matematičkim konceptima i postupcima...”* [2, str. 46]. Analiza rezultata ispitanih studenata obiju generacija KTF-a ukazala je na pomanjkanje (odsustvo) kritičkog načina razmišljanja.

S druge strane, kritičko razmišljanje⁷ samo je jedan od aspekata razmišljanja. Jedan od svjetski priznatih stručnjaka za poučavanje razmišljanja, Edward de Bono, drži da tradicionalno obrazovanje zanemaruje druge aspekte razmišljanja poput npr. kreativnog i konstruktivnog aspekta razmišljanja⁸, i na temelju dugogodišnje suradnje s poslovnim svijetom smatra da su neke **misaone vještine** koje se kroz razne predmete **u školi** možda i uče (*„vezano uz analize, razvrstavanje informacija i diskusije“*) **tek mali segment vještina razmišljanja potrebnih za život** [3, str. 4]. **Razmišljanje** shvaća kao **vještinu „koju svatko može razviti“** [3, str. 138]. Kako kaže, zabluda je razmišljanje smatrati običnom „inteligencijom u akciji“. Tvrdnju da je inteligencija potencijal, a razmišljanje operativna vještina, izvrsno pojašnjava usporedbom inteligencije i razmišljanja s automobilom i vozačkim umijećem. Naime, da bi se u potpunosti iskoristila raspoloživa snaga motora jakog automobila (inteligencija), potrebno je poboljšati vozačko umijeće (razmišljanje). Za manje snažan automobil, da bi se nadoknadio manjak snage, treba razviti visok stupanj vozačke vještine.

Jesu li visokointeligentni ljudi nužno i dobri mislioci? Činjenica je da *„nerijetko upadaju u zamku inteligencije“*; primjerice, što visokointeligentna osoba bolje brani svoj stav o nečemu, to će manje razmišljati o alternativnim rješenjima ili slušati bilo čije mišljenje (zašto bi ako je uvjerena da je u pravu?), stoga su *„mnogi visokointeligentni umovi ulovljeni u klopku loših ideja jer ih tako uspješno znaju braniti“* [3, str. 2].

Prema istraživanju provedenom na Harvardu, 90% pogrešaka u razmišljanju posljedica je pogrešaka u percepciji, našem poimanju svijeta, a ne u logici [3]. Loša logika daje loše rezultate, međutim dobra logika (uspoređuje je s besprijekornim računalom) neće dati dobre rezultate, tj. rješenja, ako se temelji na krivoj percepciji (kao što računalo izbacuje besmislicu ako je besmislica unesena). Ona treba biti vođena, usmjeravana, jer *„prepuštena sama sebi, percepcija se fiksira samo na ono što privlači našu pažnju ili odgovara našim emocijama“* [3, str. VI].

Razmišljanje se može poučavati „direktno i eksplicitno“, samo za sebe (univerzalnost određenih alata razmišljanja omogućava njihovu primjenu u svim područjima rada), pa **„postoje praktični načini“** za direktno poučavanje razmišljanja [3, str. 4]. Kao primjer navodi CoRT-ove⁹ lekcije razmišljanja koje su primjenjuju *„u školama diljem svijeta za sve dobne skupine i osobe s različitim sposobnostima“*¹⁰ [3, str. 8].

Zašto ne bismo i mi?

Istraživanja o učinku poučavanja razmišljanja daju dobre rezultate [3].

⁷ prosuđivanje istinitosti neke tvrdnje i traženje grešaka u istima

⁸ „... kritičko razaranje jedne hipoteze nikada nije proizvelo bolju. Samo kreativnost proizvodi bolje hipoteze.“ [3, str. 6]

⁹ Cognitive Research Trust

¹⁰ Naputke o razmišljanju traže i mnoge vodeće poslovne korporacije, vlade također. Autor navodi da su metode učinkovite i za djecu s Dawnovim sindromom.

Zaključak

Može se reći da je kod studenata generacije 2010./2011., prve koja je polagala državnu maturu, kao i kod studenata prethodne generacije, detektirana slaba usvojenost temeljnih matematičkih znanja i nekritički pristup rješavanju zadataka u elementarnoj matematici. Razina matematičke pismenosti također nije zadovoljavajuća. Priprema učenika za državnu maturu nije imala utjecaja na rezultate istraživanja.

Treba li to uopće biti osobita priprema? Bitne promjene mogu se očekivati prvenstveno kao plod višegodišnjeg sustavnog rada na unaprjeđenju kvalitete obrazovanja, za što se moraju koristiti rezultati državne mature. Prije svega, obrazovni ishodi trebaju biti jasno definirani i usmjereni k usvajanju važnih životnih kompetencija.

Analiza rezultata obiju generacija ukazala je na nedostatak kritičkog načina razmišljanja studenata, što se uočava i u neposrednom radu s njima.

Nije li razložno postaviti pitanje koliko se pažnje, u okviru cjelokupnog konteksta obrazovanja, posvećuje umijeću razmišljanja, kojim aspektima? Može li se razmišljanje poboljšati, učiti?

Poučavanje razmišljanja na praktičan način provodi se u školama diljem svijeta. Istraživanja o njegovu učinku daju dobre rezultate. Ova bi se iskustva trebala razmotriti.

Literatura

- [1] Gotovac, B.: *Procjena usvojenosti temeljnih znanja i pristupa rješavanju zadataka u elementarnoj matematici*, Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike RH, Zagreb, 30. lipnja - 2. srpnja 2010., Školska knjiga, Zagreb, 2010, 189 -201.
- [2] Baranović, B.; Štibrić, M.; Čižmešija, A.: *Mišljenje učitelja i nastavnika matematike o nastavi matematike u osnovnim i srednjim školama u Hrvatskoj - rezultat empirijskog istraživanja provedenog na Trećem kongresu nastavnika matematike*, Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike RH, Zagreb, 30. lipnja - 2. srpnja 2010., Školska knjiga, Zagreb, 2010, 45 -46.
- [3] De Bono, E.: *De Bonov tečaj razmišljanja*, Veble commerce, Zagreb, 2008.
- [4] Bezinović, P.: *Kritički osvrt na državnu maturu i njezino značenje za obrazovanje u Hrvatskoj*; <http://www.iro.hr/hr/javne-politike-visokog-obrazovanja/kolumna/kriticki-osvrt-na-drzavnu-maturu/>
- [5] Feynman, P. R.: *Što te briga što drugi misle?!*, Mozaik knjiga, Zagreb, 2010.